۴۱- گزینه ۴

$$P(X=Y)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=i)P(Y=i)=\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p\,(1-p)^{i-1}p=p^2\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2i-2}$$

$$=p^2\cdot\frac{1}{1-(1-p)^2}=\frac{p^2}{2p-p^2}=\frac{p}{2-p}$$

۴۲- گزینه ۱

در فضای پیوسته احتمال تساوی دو متغیر صفر است.

۴۳- گزینه ؟؟

صورت سؤال اشکال دارد. صورت و مخرج متغیر تصادفی داده شده وابسته هستند و بنابراین توزیع معرفی نمی‌شود. اما می‌توان براحتی حدس زد که یک اشکال تایپی در صورت سؤال وجود دارد و باید بصورت زیر اصلاح شود که در آن صورت داریم:

$$\frac{15(T_{16}-t)^2}{\sum_{i=1}^{15}(T_i-t)^2}=\frac{(T_{16}-t)^2}{\frac{\sum_{i=1}^{15}(T_i-t)^2}{15}}=\frac{\frac{(T_{16}-t)^2}{\sigma^2}/1}{\frac{\sum_{i=1}^{15}(T_i-t)^2}{\sigma^2}/15}=\frac{\frac{\chi_1^2}{1}}{\frac{\chi_{15}^2}{15}}\sim F_{1,15}$$

۴۴- گزینه ۳

$$f_Y(y)=f_X(y)\left|\frac{dx}{dy}\right|=1\times\left|-5e^{-5y}\right|=5e^{-5y}\quad y>0\ \sim\ \exp(5)$$

$\ast\quad f_X(x)=1 \Rightarrow f_X(y)=f_X(-5\ln x)=1$

$\ast\quad y=-5\ln x \Rightarrow x=e^{-5y} \Rightarrow \left|\frac{dx}{dy}\right|=\left|-5e^{-5y}\right|$

۴۵- گزینه ۳

عیناً تست ۵۵ فصل ۵ کتاب دکتر ایوزیان

۴۶- گزینه ۱

چون نمونه‌گیری بدون جایگذاری است پس باید یکی از شماره‌ها عدد ۸ و مابقی کمتر از ۸ باشند

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{7}{4}}{\binom{15}{5}}$$

۴۷- گزینه ۱

تست شماره ۳۱ فصل ۴ کتاب دکتر ایوزیان

۴۸- گزینه ۴

$$E(X)=m'_X(0)=\left.\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{\lambda}$$

تابع مولد گشتاور داده شده متعلق به توزیع نمایی با پارامتر λ می‌باشد.

۴۹- گزینه ۲

طبق فرآیند پواسون نرخ ورود افراد در نیم ساعت $\frac{۳۰}{۲}$ است بنابراین

$$P(X=1)=\frac{e^{-15}15^1}{1!}=15e^{-15}$$

۵۰- گزینه ۲

در صورت ثابت بودن اندازه نمونه با افزایش فاصله اطمینان (یا کاهش خطای نوع اول) خطای نوع دوم افزایش می‌یابد که باعث کاهش توان آزمون می‌شود.

۵۱- گزینه ۱

$$b(\hat{\theta})=E(\hat{\theta})-\mu=\mu+\frac{1}{n}-\mu=\frac{1}{n}$$

$$Var(\hat{\theta})=Var(\bar{X}+\frac{1}{n})=\frac{\sigma_x^2}{n}$$

$$MSE(\hat{\theta})=b^2(\hat{\theta})+Var(\hat{\theta})=\frac{1}{n^2}+\frac{\sigma_x^2}{n}=\frac{n\sigma_x^2+1}{n^2}$$

۵۲- گزینه ۳

$$E(X|X>1)=\frac{\int_1^\infty x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx}{P(X>1)}=\frac{\frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda})}{e^{-\lambda}}=\frac{1}{\lambda}+1=\frac{\lambda+1}{\lambda}$$

۵۳- گزینه ۲

~~[illegible]~~ احتمالات اصابت تیر به هدف در هر بار با هم برابر و مستقل از یکدیگر هستند بنابراین

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)=2P(A_1)-P(A_1)^2=0.84$$

$$\Rightarrow P(A_1)^2-2P(A_1)+0.84=0\Rightarrow P(A_1)=\frac{2\pm0.8}{2}=\begin{cases}1.4 & \text{غ ق ق}\\ 0.6 & \text{ق ق}\end{cases}$$

۵۴- گزینه ۳

$$P(X>t)=\int_t^\infty\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda t}$$

۵۵- گزینه ۴

$$P(B_2|A)=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)}=\frac{0.02\times0.3}{0.01\times0.2+0.02\times0.3+0.05\times0.5}=\frac{6}{33}=\frac{2}{11}$$

۵۶- گزینه ۲

طبق قضیه پواسون احتمال معیوب بودن هر لامپ برابر با $\frac{۵}{۲۵}$ است.

۵۷- گزینه ۲

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{۲}(x+y)\,dy = \frac{1}{۲}x + \frac{1}{۴}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{۲}(x+y)}{\frac{1}{۲}(x+\frac{1}{۲})} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{۲}}$$

۵۸- گزینه ۲

نرخ تلفن هایی که اشتباه وصل می شوند برابر است با $\lambda = ۱۵۰ \times ۰/۰۴ = ۶$

$$P(X>1) = 1 - P(X=۰) - P(X=1) = 1 - \frac{e^{-۶}۶^{۰}}{۰!} - \frac{e^{-۶}۶^{1}}{1!} = 1 - ۷e^{-۶}$$

۵۹- گزینه ۳

می دانیم اگر از تابع مولد گشتاور Ln بگیریم، مشتق اول امید ریاضی و مشتق دوم واریانس را بدست می دهد.

$$g_X(t) = \ln m_X(t) = ۲۰t + ۵۰t^۲$$

$$E(X) = g'_X(۰) = ۲۰$$

$$Var(X) = g''_X(۰) = ۱۰۰$$

$$\Rightarrow C.V = \frac{\sigma}{|\mu|} = \frac{۱۰}{۲۰} = \frac{1}{۲}$$

۶۰- گزینه ۳

منظور از μ'_1، $\mu'_۲$ به ترتیب $E(X)$، $E(X^۲)$ می باشد.

$$E(X) = \alpha\beta$$

$$Var(X) = \alpha\beta^2 \Rightarrow E(X^۲) = Var(X) + E^۲(X) = \alpha\beta^2 + (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2(1+\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\mu'_2}{\mu'_1} = \frac{E(X^۲)}{E(X)} = \frac{\alpha\beta^2(\alpha+1)}{\alpha\beta} = \beta(\alpha+1)$$