۴۱- گزینه ۱

با توجه به قضیه پواسون $P(\text{قطعه دوم سالم}) = P(\text{قطعه اول سالم}) = \dfrac{N_0}{N}$

۴۲- گزینه ۲

اگر وزن قسمت اول را با X نمایش دهیم، آنگاه $X \sim U(0,1)$ است و وزن قسمت دوم نیز $1-X$ می‌باشد بنابراین

$$Cov(X, 1-X) = -Var(X) = -\frac{1}{12}$$

۴۳- گزینه ۱

چون میانه کوچکتر از میانگین است پس توزیع چوله به راست است و چولگی مثبت دارد. درضمن اگر توزیع کاملاً زنگوله‌ای و متقارن می‌بود آن گاه با داشتن دامنه میان چارکی (IQR) امکان محاسبه انحراف معیار وجود داشت اما در این حالت این امکان وجود ندارد.

می توان ادعا کرد که انحراف معیار زیاد است چون میانه و میانگین اختلاف دارند و توزیع نیز تقریباً متقارن است ولی در مورد مقدار آن نمی توان ادعایی کرد.

۴۴- گزینه ۳

$$E[(-1)^X] = \sum_{x=0}^{n} (-1)^x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(-\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} = (0)^n = 0$$

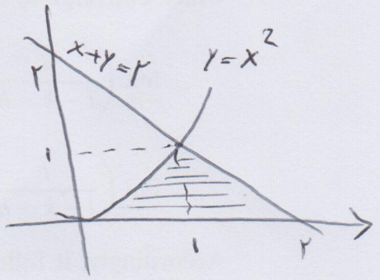
۴۵- گزینه ۱

تست شماره ۴۰ فصل ۴ کتاب دکتر ابوذریان

۴۶- گزینه ۳

برای اینکه ریشه‌های معادله $h(t) = 0$ حقیقی باشند می باید $\Delta \geq 0$ شود یعنی:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2x)^2 - 4(1)(y) \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq y \quad \text{یا} \quad x \geq \sqrt{y}$$



$$P(X \geq \sqrt{Y}) = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} \frac{3}{2} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{3}{4} y \left((2-y)^2 - (\sqrt{y})^2\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(3y + \frac{3}{4} y^3 - \frac{15}{4} y^2\right) dy = \frac{7}{16}$$

۴۷- گزینه ؟؟

صورت سؤال باید بصورت $0 \leq x \leq 1$ اصلاح شود. تابع داده شده، تابع چگالی نمی باشد. با انجام تصحیح فوق:

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{1}{2}(x+y) \, dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} y$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2}(x+y)}{\frac{1}{2}(y+\frac{1}{2})} = \frac{2(x+y)}{2y+1}$$

که گزینه ۳ جواب خواهد بود.

۴۸ - گزینه ۱

واریانس توزیع χ^2 دو برابر درجه آزادی آن است. در ضمن توزیع مربع کای با دو درجه آزادی همان توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ است. بنابراین

$$P(\chi^2_2 > 3) = e^{-\frac{3}{2}}$$

۴۹ - گزینه ۴

منظور از رگرسیون X و Y به ازای $Y=-1$ همان $E(X|Y=-1)$ است. ابتدا تابع احتمال $X|Y=-1$ را محاسبه می‌کنیم

$$P(X=1|Y=-1) = \frac{P(X=1, Y=-1)}{P(Y=-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow E(X|Y=-1) = (1)(\frac{4}{5}) + (-1)(\frac{1}{5}) = \frac{3}{5}$$

$$P(X=-1|Y=-1) = \frac{P(X=-1, Y=-1)}{P(Y=-1)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}$$

۵۰ - گزینه ۲

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = 2x_1^2 \Rightarrow \frac{1}{|J|} = \frac{1}{2x_1^2} = \frac{1}{2y_1}$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1,y_2) \cdot \frac{1}{|J|} = 4y_2 \cdot \frac{1}{2y_1} = \frac{2y_2}{y_1}$$

۵۱ - گزینه ۴

$$X_1 \sim \exp(\tfrac{1}{\beta})$$

$$\Rightarrow P(X_1 < aX_2) = \frac{\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{a\beta}} = \frac{a}{1+a}$$

$$aX_2 \sim \exp(\tfrac{1}{a\beta})$$

۵۲ - گزینه ۴

$$MLE\left(P(X > x_0)\right) = MLE\left(e^{-\frac{x_0}{\beta}}\right) = e^{-\frac{x_0}{MLE(\beta)}} = e^{-\frac{x_0}{\bar{x}}}$$

۵۳ - گزینه ۴

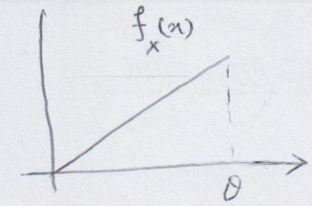
$$P(|X| < \sigma < 10|X|) = P\left(\frac{\sigma}{10} < |X| < \sigma\right) = P(0.1 < |Z| < 1)$$

$$= 2P(0.1 < Z < 1) = 2(\Phi(1) - \Phi(0.1)) \simeq 0.6$$

۵۴ - گزینه ۲

هرچند صورت سؤال کمی گنگ است اما می‌توان متوجه شد که منظور از عبارت «مشاهده حداقل دو گوی سیاه» ملاک رد فرض صفر بوده است بنابراین

$$\pi_{(\theta=4)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{34}{81}$$



۵۵ - گزینه ۳

$$E(X) = \frac{2}{3}\theta = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X}$$

تذکر: در توابع چگالی مثلثی، امید ریاضی $\frac{2}{3}$ طول بازه است

---

۵۶ - گزینه ؟؟

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Z \Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim Z$$

$$\sum_{j=2}^{k} Z_j^2 \sim \chi^2_{k-1} \Rightarrow \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\sum_{j=2}^{k} Z_j^2}{k-1}}} = \frac{\sqrt{n(k-1)}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma\sqrt{\sum_{j=2}^{k} Z_j^2}} \sim t_{k-1} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{nk}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma\sqrt{\sum_{j=1}^{k} Z_j^2}} \sim t_k$$

احتمالاً منظور طراح گزینه ۳ بوده است اما واضح است که متغیر تصادفی داده شده توزیع معروفی ندارد

---

۵۷ - گزینه ۴

در صورت سؤال نامی از توزیع نرمال برده نشده اما تمام گزینه ها براساس این توزیع طراحی شده اند بنابراین:

$$P(|X-80| \geq S) = P(|Z| \geq \frac{S}{3}) = 0.05 \Rightarrow \frac{S}{3} = Z_{0.025} \Rightarrow S = 3Z_{0.025}$$

---

۵۸ - گزینه ۳

برآورد فاصله‌ای دوطرفه $(1-\alpha)$ درصدی برای μ نرمال:

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow Z_{0.05}\frac{4}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow \sqrt{n} = 6.6 \Rightarrow n = 43.56 \simeq 44$$

---

۵۹ - گزینه ۲

احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته مقادیر کمتر یا بیشتر از میانه خودش را اختیار کند برابر با $\frac{1}{2}$ است بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

---

۶۰ - گزینه ۱

تابع احتمال تقاضای مشتری (Y) و موجودی انتهای روز (X) بصورت زیر است:

Y	2	3	4
$P(Y=y)$	0.3	0.5	0.2

$\Rightarrow$

X	1	0	-1
$P(X=x)$	0.3	0.5	0.2

$\Rightarrow E(X) = 0.1$, $Var(X) = 0.49$

توزیع موجودی پس از ۱۰۰ روز با استفاده از قضیه حد مرکزی بصورت نرمال (۴۹ و ۱۰) است بنابراین:

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i < 18\right) = P\left(Z < \frac{18-10}{\sqrt{49}}\right) = \Phi\left(\frac{8}{7}\right) \simeq 0.84$$